ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 135
Α2. Σχολικό σελίδα 51
Α3. Σχολικό σελίδα 23
Α4.
α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β
Β1
Θέτουμε όπου x+1 το y.
Οπότε $f(y) = ye^{-(y-1)} = ye^{1-y}$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.
Β2.
$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

Β3.
$f''(x) = [(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x}$
$= e^{1-x}(x-2)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Άρα η f είναι κοίλη στο$(-\infty, 2]$.
Οπότε παρουσιάζει καμπή στο σημείο (2, f(2))≡ $\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'}=$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0.$

Η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty.$
Άρα στο $-\infty$ δεν έχει ασύμπτωτες.

B4.
(i)
$A_1=(-\infty,1]$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)]=(-\infty,1]$.

$A_2=(1,+\infty)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2)=(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x))=(0,1)$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

(ii)
$f(x)=\lambda$
Αν $\lambda\le 0$
$\lambda\in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1. (λόγω μονοτονίας στο A_1)

Αν $0<\lambda<1$
$\lambda\in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1. (λόγω μονοτονίας στο A_1)
$\lambda\in f(A_2)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_2. (λόγω μονοτονίας στο A_2)
Άρα έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Για λ=1 ακριβώς μία λύση

Για λ>1 καμία λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για x<0: η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για 0<x≤ $\frac{3\pi}{2}$: η f συνεχής ως τριγωνομετρική

Στο x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x)$=$\lim_{x\to 0^-}$ $(ax^3 - 3x^2 - x + 1)$=1

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$=$\lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$

Προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ οπότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και f(0)=1

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Οπότε η f είναι συνεχής στο x_0=0

Επομένως, η f συνεχής στο (-∞,$\frac{3\pi}{2}$]

Έχουμε ότι: $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$= $\lim_{x\to 0^-} \frac{a^3-3x^2-x+1-1}{x}$ = $\lim_{x\to 0^-} \frac{x(a^2-3x-1)}{x}$=-1

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ = $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$=0

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ≠$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0

Γ2)

i) Η f συνεχής στο (0,$\frac{3\pi}{2}$] ως τριγωνομετρική και f συνεχής στο x_0 =0. Άρα η f συνεχής [0,$\frac{3\pi}{2}$]

- Η f παραγωγίσιμη στο (0,$\frac{3\pi}{2}$), με : f΄(x)= -ημx
- f(0)=1

f($\frac{3\pi}{2}$)=0 Προκύπτει ότι f(0)≠ f($\frac{3\pi}{2}$)

Άρα, η f δεν ικανοποιεί την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle

ii) Θεωρώ f(x)=συνx, x∈ [$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$] ⊆ [0,$\frac{3\pi}{2}$]

Η f συνεχής [$\frac{\pi}{2}$,$\frac{3\pi}{2}$]

Η f παραγωγίσιμη στο ($\frac{\pi}{2}$,$\frac{3\pi}{2}$), με: f΄(x)= -ημx

f ($\frac{\pi}{2}$) = f($\frac{3\pi}{2}$)=0

Άρα, από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ ($\frac{\pi}{2}$,$\frac{3\pi}{2}$) ⊆ (0,$\frac{3\pi}{2}$)

τέτοιο ώστε: f΄(ξ)=0 ⇔ -ημξ=0 ⇔ ημξ=0 ⇔ ξ=π

Γ3) Ισχύει ότι f΄(x) =3αx^2-6x-1 για x<0

Έστω ότι υπάρχει (x_0,f(x_0))∈Cf με x_0<0 τέτοιο ώστε f΄(x_0)=0 τότε 3αx_0^2-6x_0-1=0 (1)

Δ=(-6)^2 – 4(3α)(-1)=36+12α=12(3+α)

Από υπόθεση α<-3⇒α+3<0 άρα Δ<0 άρα η (1) είναι αδύνατη δηλαδή f΄(x) ≠0

Οπότε δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης με αρνητική τετμημένη τέτοια ώστε να επιδέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον x΄x.

Γ4

- Για x<0: f'(x)<0
- Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$: f' (x)= -ημx

  f'(x)=0 ⇔ -ημx=0 ⇔ x=π

  f'(x)>0 ⇔ -ημx>0 ⇔ ημx<0 ⇔ $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

  f'(x)<0 ⇔ -ημx<0 ⇔ ημx>0 ⇔ 0<x<π

X	-∞		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f		↘		↘		↗	

Η f' (x)<0, x∈(-∞,0) ∪(0,π) και f συνεχής στο 0 και π άρα, η f ↓ (-∞,π]

Η f' (x)>0, x∈ $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ και f συνεχής στο π και $\frac{3\pi}{2}$ άρα , η f ↑ $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$

Επομένως η f στο x=π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(π)=-1.

Άρα, f(x) ≥ f(π), για κάθε $x\in(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$

Δηλαδή f(x)≥-1 , για κάθε $x\in(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $lnx=\frac{1}{x} \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} xlnx=1 \Leftrightarrow xlnx-1=0$.

Θέτω $\varphi(x)=xlnx-1$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\varphi(1)=-1<0$

$\varphi(e)=e-1>0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0lnx_0-1=0 \Leftrightarrow x_0lnx_0=1$ (*)

$\varphi'(x)=lnx+x\frac{1}{x}=lnx+1$

Για $x \in (1, e)$ $\ \ lnx + 1 > 0,$ άρα $\varphi'(x) > 0$
Συνεπώς η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$
Οπότε το x_0 μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

Δ2. $f(x) = (lnx_0) \cdot (x + 1) - lnx - 1$
$f'(x) = lnx_0 - \frac{1}{x}$
Θέτω $f'(x) = 0 \iff lnx_0 - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} = lnx_0 \iff x = \frac{1}{lnx_0} = x_0$ (*)

x	0		x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	O	$+$
f		$\searrow$	Ελαχ.	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = lnx_0(x_0 + 1) - lnx_0 - 1$
$f(x_0) = x_0 lnx_0 + lnx_0 - lnx_0 - 1$
$f(x_0) = x_0 lnx_0 - 1 = 0$ από ερώτημα Δ1.

Δ3. $g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \frac{{x_0}^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow xe^{-x}e^{x+1} = {x_0}^{x+1} \Leftrightarrow x \cdot e = {x_0}^{x+1} \Leftrightarrow$
$\ln(ex) = ln{x_0}^{x+1}$
$\Leftrightarrow lne + lnx = (x + 1)lnx_0 \Leftrightarrow 1 + lnx = xlnx_0 + lnx_0$ (1)

Για $x = x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 1 + lnx_0 = x_0 lnx_0 + lnx_0$ ισχύει λόγω του Δ1.

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Longrightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} \Leftrightarrow g'\,(x_0) = e^{-x_0}(1 - x_0)$

$h(x) = e^{(x+1)ln\left(\frac{x_0}{e}\right)}$

$h'(x) = e^{(x+1)ln\left(\frac{x_0}{e}\right)} \cdot ln\frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}(lnx_0 - 1)$ $\quad$ (2)

$x_0 lnx_0 = 1 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$ $\quad$ (3)

$x_0 lnx_0 = 1 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e} = e^{\frac{1}{x_0}-1}$ $\quad$ (4)

$\xRightarrow{(2),(3),(4)} h'(x_0) = \left(e^{\frac{1}{x_0}-1}\right)^{x_0+1}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow h'(x_0) = e^{\frac{1}{x_0}}e^{-x_0}\frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) =$
$x_0 e^{-x_0}\frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) = g'(x_0).$

Δ4. $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε x>0 A(x,f(x)) B(x,φ(x))
Έστω συνάρτηση $K(x) = f(x) - \varphi(x)$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη στο x_0.
Άρα ισχύει $K(x) \geq K(x_0)$ για κάθε x>0.
Επομένως $\varphi(x) = f(x) - K(x)$.

$\text{Lim}_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-K(x)-f(x_0)+K(x_0)}{x-x_0}=$
$\lim_{x\to x_0^-}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{K(x)-K(x_0)}{x-x_0})=l_1$

Ισχύει $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$
Και ισχύει $K(x)>K(x_0)$ κοντά στο x_0, άρα για $x<x_0$
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{K(x)-K(x_0)}{x-x_0}=+\infty$
Οπότε $l_1=+\infty$

Ομοίως για $x>x_0$ το $\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\ldots=\ -\infty$ δηλαδή $l_2=+\infty$
Άρα $l_1\neq l_2$, συνεπώς η φ(x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, οπότε το $x=x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Β Λύση
Έστω K(x)=f(x)-φ(x).
$d(A,B)=\sqrt{(x-x)^2-(f(x)-\varphi(x))^2}=|f(x)-\varphi(x)|$ με f(x)>φ(x) για x>0
Άρα $d(A,B)=f(x)-\varphi(x),x>0$.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε K(x) παραγωγίσιμη στο x_0 με $K'(x_0)=f'\ (x_0)-\varphi'(x_0)$ όπου x_0 ελάχιστο, άρα $K'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0)\overset{\Delta 3}{\Rightarrow}\varphi'(x_0)=0$, επομένως κρίσιμο σημείο.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

Επιμέλεια:

ΚΑΛΑΪΤΖΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΜΑΝΩΛΗΣ, ΤΡΑΣΤΑΝΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ, ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΚΟΝΤΟΣΤΕΡΓΙΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ, ΓΕΩΡΓΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ, ΠΕΤΡΑ ΖΩΗ, ΖΕΝΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΑΛΕΥΡΟΝΤΑΣ ΣΕΡΑΦΕΙΜ, ΣΑΜΑΡΤΖΗΣ ΠΕΤΡΟΣ, ΗΛΙΑΔΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ, ΚΑΡΑΚΩΝΣΤΑΝΤΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ, ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ ΝΙΚΗ, ΦΡΑΝΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ, ΣΚΟΥΛΑΞΕΝΟΣ ΒΑΓΓΕΛΗΣ, ΚΑΚΛΑΜΑΝΗΣ ΝΙΚΟΣ, ΓΙΑΝΝΑΚΟΥ ΝΙΚΗ, ΓΚΟΛΕΜΗ ΡΕΝΙΑ, ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, ΜΗΤΡΟΓΛΟΥ ΝΑΣΟΣ, ΠΑΠΑΛΙΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ, ΓΚΑΝΑΤΣΙΟΣ ΣΤΕΛΙΟΣ, ΚΟΥΚΟΥΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΤΣΙΟΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ, ΤΣΑΝΟΣ ΟΡΦΑΝΟΣ.

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιά, Κερατσίνι, Αμφιάλη, Λαμία, Βριλήσσια, Κιάτο, Πετρούπολη, Νέα Φιλαδέλφεια, Περιστέρι Κέντρο, Καβάλα, Μοσχάτο, Αρτέμιδα, Βούλα, Ηράκλειο Κρήτης, Αλεξανδρούπολη, Θεσσαλονίκη Πεύκα.