

ΘΕΜΑ Α

A1.

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας ισχύει $f_i = v_i/v$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

Επομένως:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = v_1/v + v_2/v + \dots + v_k/v = (v_1 + v_2 + \dots + v_k)/v$$

Όμως το άθροισμα όλων των απόλυτων συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος,

$$\text{δηλαδή } v_1 + v_2 + \dots + v_k = v. \text{ Άρα: } f_1 + f_2 + \dots + f_k = v/v = 1$$

A2.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3.

Η συνάρτηση πρώτης παραγώγου f' της f είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο B και τύπο:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \{ [f(x+h) - f(x)] / h \} \text{ που αντιστοιχίζει κάθε } x \in B \text{ στην παράγωγο της } f \text{ στο σημείο αυτό.}$$

A4.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, x \in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

B2. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στην θέση $x = -1$ το $f(-1) = \frac{8}{3}$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 3$ το $f(3) = -8$

B3. (ε) η εφαπτομένη της Cf στο $A(0, f(0))$

(ε) : $y = \lambda x + \beta$

$\lambda = f'(0) = -3 \Rightarrow y = -3x + \beta$

$A(0, f(0)) \in (\varepsilon) \Rightarrow f(0) = \beta \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow y = -3x + 1$

B4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\bar{x} = \frac{4+5+4+k+0+3+7}{7} \leftrightarrow 4 = \frac{23+k}{7} \leftrightarrow 23+k = 28 \leftrightarrow k = 28 - 23 \leftrightarrow k = 5$

Γ2. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι : 0,3,4,4,5,5,7, εφόσον $n=5$ (μονός αριθμός), οπότε

$\delta = 4^{\text{η}}$ παρατήρηση, δηλαδή $\delta = 4$

Γ3. $S^2 = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + 2(4-4)^2 + 2(5-4)^2 + (7-4)^2}{7} = \frac{16+1+2+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$

Γ4. $s = \sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$

$cv = \frac{s}{x} \cdot 100 = \frac{2}{4} \cdot 100 = 50\%$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές διότι $CV=50\% > 10\%$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από την τύπο $E = x \cdot y$ και $E = 100$ ισχύει ότι:

$$xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

Όμως πρέπει

- $x > 0$ και

- $y > 0 \Leftrightarrow \frac{100}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $x > 0$.

Έστω $\Pi(x)$ η συνάρτηση της περιμέτρου ως προς x .

Τότε $\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ2.

$$\Pi'(x) = 2x + \frac{200}{x} = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}$$

Έστω $\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x > 10$, εφόσον $x > 0$. Επομένως:

- $\Pi'(x) < 0$, $\forall x \in (0, 10)$
- $\Pi'(x) > 0$, $\forall x \in (10, +\infty)$

Άρα η $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10, +\infty)$.

Η ελάχιστη τιμή της $\Pi(x)$ προκύπτει στο $x_0 = 10$ όπου οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 10m$ και $y = \frac{100}{10} \Leftrightarrow y = 10m$. Δηλαδή έχουμε τετράγωνο.

Δ3. Παρατηρούμε ότι στο $(0, 10)$ η $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$0 < x_1 < x_2 < 10$, τότε $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$, οπότε $\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

Άρα $A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.



ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

Δ4.

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2x^2 - 200}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)(\sqrt{10x} + 10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(10x - 100)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x - 10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x - 10)} \\&= \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{10 \cdot 100} \\&= \frac{8}{10} \\&= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Επιμέλεια:

Πολύδωρος Γιώργος, Πανάγου Γιώργος, Φουρτούνη Μαρία-Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Αντωνιάδης Σωκράτης, Ζήση Ευανθία, Λουλακάς Γιώργος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερασίни, Γκύζη, Καβάλα, Παγκράτι Κέντρο, Ηράκλειο Κρήτης (Άγιος Ιωάννης και 62 Μαρτύρων), Νίκαια, Περιστέρι Νέα Ζωή