ΘΕΜΑ Α
Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 133
Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 51
Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 185
Α4. Λ Σ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β
Β1. Έχουμε:

$$A_h = \{x \in A_g \; και \; g(x) \in A_f\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \; και \sqrt{x-2}+1 > 1\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \quad και \sqrt{x-2} > 0\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \quad και \quad x-2 > 0\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \; και \; x > 2\} = (2,+\infty)$$

Με τύπο : $h(x) = (f^\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2ln\big(\sqrt{x-2}+1-1\big)$
$h(x) = 2ln\big(\sqrt{x-2}\big) = ln\big(\sqrt{x-2}\big)^2 = ln(x-2)$, με x> 2.

Β2.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο (2, +∞) με

$h'(x) = 1 / (x - 2) \cdot (x - 2)' = 1 / (x - 2) > 0$, $x > 2$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (2, +∞).

Άρα η h είναι «1-1», οπότε η h αντιστρέφεται.

$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty))$

Α = (2, +∞) → (h αύξουσα & συνεχής) $h((2, +\infty)) = (\lim_{x\to 2^+} h(x) , \lim_{x\to +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$, γιατί:

Αριστερό άκρο:

$x - 2 = t > 0$

$t_0 = \lim_{x\to 2^+} (x - 2) = 0$

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{t\to 0^+} (\ln t) = -\infty$

Δεξιό άκρο:

$x - 2 = t$

$t_0 = \lim_{x\to +\infty} (x - 2) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{t\to +\infty} (\ln t) = +\infty$

Εύρεση τύπου της αντίστροφης :

$h(x) = y \iff \ln(x-2) = y \iff x-2 = e^y \iff x = e^y + 2$

$\Rightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$

Άρα $\mathbf{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}}$

$\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = -\infty$

$x - 2 = t \Rightarrow x - 1 = t + 1$

$t_0 = \lim_{x\to 2} (x-2) = 0$

$\lim_{t\to 0} \ln(t+1)/t \ \ ^{0/0} \ (\text{D.L.H.}) \ \lim_{t\to 0} 1/(t+1) = 1$

$\lim_{x\to 2} \ln(x-2) = \lim_{t\to 0} (\ln t) = -\infty$

Επομένως: $\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ]$ **= (−∞) · 2 = −∞**

Β3.

$\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = -\infty$

$x - 2 = t \Rightarrow x - 1 = t + 1$

$t_0 = \lim_{x\to 2} (x-2) = 0$

$\lim_{t\to 0} \ln(t+1)/t \ \ ^{0/0} \ (\text{D.L.H.}) \ \lim_{t\to 0} 1/(t+1) = 1$

$\lim_{x\to 2} \ln(x-2) = \lim_{t\to 0} (\ln t) = -\infty$

Επομένως: $\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ]$ **= (−∞) · 2 = −∞**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $y = x$ εφαπτόμενη της f στο $(0,f(0))$, άρα $f'(0) = 1$

$f'(x) = \frac{kx^4+(3k-\mu)x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$, άρα $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^3+\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} (kx) = \kappa \cdot (+\infty)$$

- *Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$,αν κ<ο ή κ>0 αντίστοιχα, άτοπο, διότι έχει οριζόντια ασύμπτωτη*

- *Αν κ = 0 , τότε* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ *, τότε η y = 0 οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞*

Τελικά , κ = 0 .

Γ2.

i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ *η* $x = 1$

Μονοτονία

- *για* $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ *είναι* $f'(x) < 0$ *, άρα f:γνησίως φθίνουσα στα* $(-\infty,-1]$ *και* $[1,+\infty)$
- *για* $x \in (-1,1)$ *είναι* $f'(x) > 0$ *, άρα f:γνησίως αύξουσα στο [-1, 1]*

Ακρότατα

- *η f παρουσιάζει ελάχιστο για x =-1 το f(-1) = -1/2 και*
- *η f παρουσιάζει μέγιστο για x = 1 το f(1) = 1/2 .*

ii)

$A_1 = (-\infty,-1] \to f(A_1) = [f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$

$A_2 = (-1,1) \to f(A_2) = \left(\lim_{x\to-1^+} f(x), \lim_{x\to1^-} f(x)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$A_3 = [1,+\infty) \to f(A_3) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

Άρα , $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ *(1)*

- *για* $\alpha \neq 0$ *είναι* $\alpha^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$*, δηλαδη* $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$ *και η (1) είναι αδύνατη*
- *για α = 0 είναι* $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2} \in f(A_3)$ *όπου f μονότονη , άρα 1-1 και η (1) έχει μοναδική λύση την x = 1*

Γ3.

i) Είναι $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx \xrightarrow{\nu=\nu+1} I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$ *προσθέτοντας κατά μέλη , προκύπτει ότι*

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \ (2)$$

ii) για ν = 0 , $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = ln\sqrt{2}$

Από (2) για ν = 0 είναι $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - ln\sqrt{2}$

Από (2) για ν = 1 είναι $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + ln\sqrt{2} = ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Ορίζω h(x) = g(x) + x στο [−1, 0].

▻ h: συνεχής στο [−1, 0] ως πράξεις συνεχών [συναρτήσεων].

▻ h(0) = g(0)

→ έχουμε 0 < g(x) < 1, ∀x∈ℝ $\Leftrightarrow_{x=0}$ 0 < g(0) < 1 ⟹ h(0) > 0

▻ h(−1) = g(−1) − 1

→ έχουμε 0 < g(x) < 1, ∀x∈ℝ $\Leftrightarrow_{x=-1}$ 0 < g(−1) < 1 ⟹ −1 < h(−1) < 0, άρα h(−1) < 0

Άρα, από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1 ∈ (−1, 0) :

h(x_1) = 0 ⟹ g(x_1) + x_1 = 0.

• h: παραγωγίσιμη στο ℝ με h′(x) = g′(x) + 1

Εφόσον g′(x) ≠ −1, ∀x∈ℝ ⟹ h′(x) ≠ 0, ∀x∈ℝ

Επίσης η g′ είναι συνεχής, άρα h′: συνεχής

⟹ η h′ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο ℝ ⟹ h: γν. μονότονη

$\Longrightarrow$ h: «1-1», οπότε η x_1 είναι [μοναδική] ρίζα της $g(x) + x = 0$. ✓

Δ2.

⊳ $\lim_{x\to 0^-} [\, f(x) - f(0) \,] / (x - 0) = \lim_{x\to 0^-} [\, x^2\cdot(g(x) + x) - 0 \,] / x = \lim_{x\to 0^-} x\cdot(g(x) + x) = 0$

→ $\lim_{x\to 0^-} x = 0$

→ $\lim_{x\to 0^-} (g(x) + x) = g(0)$ διότι g: συνεχής.

⊳ $\lim_{x\to 0^+} [\, f(x) - f(0) \,] / (x - 0) = \lim_{x\to 0^+} (2ημx + εφx - kx) / x =$

$= \lim_{x\to 0^+} (\, 2\cdot ημx / x + εφx / x - k \,) = 2 + 1 - k = 3 - k$

→ $\lim_{x\to 0^+} ημx / x = 1$

→ $\lim_{x\to 0^+} εφx / x = \lim_{x\to 0^+} (\, ημx / x \cdot 1 / συνx \,) = 1\cdot(1 / 1) = 1$

⊳ Εφόσον f: παραγωγίσιμη $\Longrightarrow$ f: παραγωγίσιμη στο $x = 0$ $\Longrightarrow$

$\lim_{x\to 0^-} [\, f(x) - f(0) \,] / (x - 0) = \lim_{x\to 0^+} [\, f(x) - f(0) \,] / (x - 0)$

$\Longrightarrow$ $3 - k = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{k = 3}$

Δ3.

i) $f(x) = 2\cdot ημx + εφx - 3x$ στο $[0, π/2)$

$f'(x) = (2ημx + εφx - 3x)' = 2συνx + 1 / συν^2x - 3 = (2συν^3x - 3συν^2x + 1) / συν^2x$, $x\in[0, π/2)$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2συν^3x - 3συν^2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (συνx - 1)^2\cdot(2συνx + 1) = 0 \Longrightarrow$

$\Longleftrightarrow συνx = 1$ ή $συνx = -1/2$

$συνx = 1 \Longrightarrow x = 0$ *(συνx = −1/2 : αδύνατη, διότι x∈(0, π/2) και συνx > 0)*

Πίνακας προσήμου της f′ στο [0, π/2):

x	**0** ··············· **π/2**
$(συνx - 1)^2$	+
$2συνx + 1$	+
$συν^2x$	+

f′(x)	+
f(x)	↗ (γν. αύξουσα)

Άρα f: γν. αύξουσα στο $[0, \pi/2)$.

- για $x \geq 0 \xRightarrow{(f\uparrow)} f(x) \geq f(0) \implies f(x) \geq 0$.

Δ4.

i) Έχουμε $f(x) = x^2 \cdot (g(x) + x)$ στο $(-\infty, 0]$.

Ορίζω την $f(x) = x^2 \cdot h(x)$ στο $[x_1, 0]$ όπου $h(x) = g(x) + x$ από το ερώτημα Δ1.

→ για $-1 < 0$ έχουμε $h(-1) < h(0)$ και h: γν. μονότονη

$\implies$ h: γν. αύξουσα στο $[x_1, 0]$.

→ $x_1 < x < 0 \overset{(h\uparrow)}{\iff} h(x_1) < h(x) < h(0) \implies$ $\mathbf{0 < h(x)}$

(αφού από Δ1 είναι $h(x_1) = 0$)

Επίσης $x^2 \geq 0,\ \forall x \in [x_1, 0]$.

Συνεπώς $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_1, 0]$.

$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)|\, dx = \int_{x_1}^{\pi/3} f(x) \cdot dx$

→ $\phi(x_2) = 0 \implies 3f(x_2) - \pi = 0 \iff f(x_2) = \pi/3$

→ $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, \pi/2)$ (από Δ3 i)

- $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_1, 0]$ (από Δ4 i)

$\implies f(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_1, \pi/3]$ και f: συνεχής στο $[x_1, \pi/3]$

- Ο άξονας y′y χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά (ίσου εμβαδού) χωρία $\implies$

$\implies \int_{x_1}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi/3} f(x)\, dx$.

Υπολογισμός με παραγοντική ολοκλήρωση

$\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot (g(x))'\,dx = [\, x^3 \cdot g(x)\,]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} (x^3)' \cdot g(x)\,dx =$

$= -x_1^3\, g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3x^2 \cdot g(x)\,dx \quad [\, g(x_1) = -x_1 \,]$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 \cdot g(x)\,dx \qquad (1)$

- Έχουμε $f(x) = x^2 \cdot (g(x) + x)$ στο $[x_1, 0] \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow f(x) = x^2\, g(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2\, g(x) = f(x) - x^3$

Οπότε $\int_{x_1}^{0} x^2 \cdot g(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} (f(x) - x^3)\,dx = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$

→ $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/3} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx =$

$= [\, -2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - 3x^2/2 \,]_{0}^{\pi/3} =$

$= -2\sigma\upsilon\nu(\pi/3) - \ln|\sigma\upsilon\nu(\pi/3)| - 3\cdot(\pi^2/9)/2 + 2\cdot 1 = 1 - \ln(1/2) - \pi^2/6 = 1 + \ln 2 - \pi^2/6$

→ $\int_{x_1}^{0} x^3\,dx = [\, x^4/4 \,]_{x_1}^{0} = -x_1^4/4$

Άρα $(1) \Longrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = x_1^4 - 3(\, 1 + \ln 2 - \pi^2/6 + x_1^4/4 \,) =$

$= x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \pi^2/2 - 3x_1^4/4$

Τελικό αποτέλεσμα: $\boldsymbol{\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = x_1^4/4 + \pi^2/2 - 3\ln 2 - 3}$

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Πολύδωρος Γιώργος, Πετρά Ζωή, Νικηφόρος Εμμανουήλ, Μαρζάβα Μαρία, Νατσιούλας Αθανάσιος, Χουδετσανάκη Ελένη, Κοσμαδάκης Εμμανουήλ, Μπιτσανάκης Στέλιος, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Σπηλιωτόπουλος Νίκος, Χειμωνά Γεωργία, Φουρτούνη Μαρία Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Αντωνιάδης Σωκράτης

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Καλαμάτα, Ηράκλειο Κρήτης (Άγιος Ιωάννης και 62 Μαρτύρων), Λαμία, Φιλοθέη/Ψυχικό, Λάρισα, Αμφιάλη, Νίκαια, Καισαριανή, Παγκράτι Κέντρο, Θεσσαλονίκη Τούμπα, Περιστέρι Νέα Ζωή, Καβάλα